ВІСНИК ПРИАЗОВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
2001 р **Вип.№11**

УДК 537. 86 : 621. 314

Гейзер А.А.*

СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРАХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрены электромагнитные процессы в схемах электропитания магнитно импульсных устройств на основе колебательных контуров с сосредоточенными параметрами. Показано, что эти процессы описываются неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Приводится решение полученного уравнения.

Введение. Колебательные контура с сосредоточенными параметрами находят широкое применение в различных устройствах, служащих в разнообразных сферах человеческой деятельности. Для большей определенности ограничим круг рассматриваемых устройств схемами электропитания всевозможных установок - ускорителей заряженных частиц, электромагнитных фильтров для очистки отходящих газов и т. д., в которых колебательные контура находят широкое применение [1]. Этот выбор обусловлен еще и тем, что именно в них наиболее важно знать характер электромагнитных процессов, происходящих в отдельных элементах, входящих в состав колебательного контура. Это продиктовано значительными токами, текущими по элементам колебательного контура, а также зависимостью электрической прочности диэлектриков от параметров воздействующего напряжения [2], поэтому здесь важны точные расчеты.

Электромагнитные процессы в колебательном контуре. Рассмотрим электромагнитные процессы, происходящие в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами (рис. 1), который состоит из конденсатора С, катушки индуктивности L и активного сопротивления R. Описывая эти процессы в колебательном контуре, в некоторых учебниках по физике, да и ма тематике, например в [3], для составления дифференциального уравнения пользуются вторым законом Кирхгофа для замкнутых контуров, рассматривая разряд предварительно заряженного конденсатора С на катушку индуктивности L и активное сопротивление R в результате замыкания ключа Кл в положение 2 (рис. 1). При этом в левой части уравнения записывается сумма падений напряжений на отдельных элементах контура: катушке индуктивности, активном сопротивлении, конденсаторе, а правая часть приравнивается к нулю, так как в состав контура, якобы, не входит источник ЭДС. В результате применения указанного приема, электромагнитные процессы, протекающие в такой системе, описываются однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

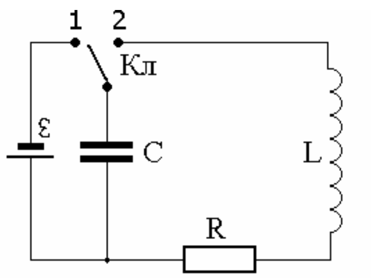

Рис. 1- Колебательный контур с сосредоточенными параметрами

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0\,, \tag{1}$$

где L – величина индуктивности колебательного контура; I – сила тока в контуре; t – текущее время; R – величина активного сопротивления; q – заряд, запасенный в конденсаторе контура; C – электроемкость колебательного контура.

После составления дифференциального уравнения задаются соответствующие ему начальные условия типа

$$I(0) = 0; \quad U_{ck}(0) = U_{ckm}\,, \tag{2}$$

где U_{ck} - напряжение на конденсаторе колебательного контура.

* ПГТУ, канд. техн. наук, доц.

Собственно к такому же виду уравнения, как и уравнение (1), приходят и другие авторы, выводя дифференциальное уравнение колебаний в колебательном контуре другими способами [4, 5], на основании чего можно сделать вывод, что как бы оно ни было получено, оно действительно отражает второй закон Кирхгофа для замкнутого контура.

Из приведенного выше уравнения (1) видно, что оно описывает процессы изменения тока и напряжения на отдельных элементах колебательного контура без учета причин возникновения и существования электрического тока в нем и составлено по законам теории электрических цепей. При этом возникает противоречие между реальным ходом протекающего процесса в колебательном контуре и его математическим описанием. Поясним сказанное выше более подробно.

Для возникновения и существования электрического тока в любом замкнутом контуре необходим источник тока или напряжения, т. е. устройство в котором разделены и могут перемещаться электрические заряды. Естественно, что это устройство обладает при этом определенной энергией. Из вида уравнения (1) следует сделать вывод, как бы это не звучало парадоксально, что оно не удовлетворяет условию существования электрического тока в замкнутом контуре, так как в записи нашего уравнения ЭДС равна нулю, так как равна нулю правая часть уравнения (1). Следовательно, и ток в контуре не должен существовать, поэтому, на наш взгляд, единственным физически обоснованным решением этого уравнения является его нулевое решение, в чем и заключается отмеченное нами выше противоречие.

Наглядно сказанный выше тезис можно подтвердить тем, что если взять одну из составляющих в левой части уравнения (1), например IR и приравнять ее к нулю, то решением данного уравнения будет значение тока $I = 0$. Так как все три слагаемых в левой части уравнения (1) равноправны, то выше сказанное относится и к ним.

Разрешение данного противоречия заключается в том, что в уравнении (1) необходимо задать значение правой части отличной от нуля, так как оно составлено с нарушением основного условия второго закона Кирхгофа, требующего задания значения источника электродвижущей силы [6]. Видимо чувствуя это, в некоторых учебниках задают значение ЭДС, причем различными способами и в некоторых случаях весьма своеобразно. Так в [7] ее значение задается в виде функции U(t). Казалось бы все благополучно, но в дальнейшем, не поставив задачи нахождения значения функции U(t), авторы считают, что в колебательном контуре электродвижущая сила U постоянна и в частности равна нулю, что равносильно по сути дела тому, что значение правой части уравнения (1) не задается.

Другая группа авторов [3 - 5, 8, 9] считает, что в контуре единственной электродвижущей силой является ЭДС самоиндукции. Этот довод не может быть принят по нескольким причинам. Во первых, в начальный момент времени ток в контуре равен нулю (что следует из начальных условий), в виду чего ток в контуре возникнуть не сможет. Во вторых, ЭДС самоиндукции наоборот препятствует нарастанию тока в контуре (правило Ленца). В третьих - источником тока может быть устройство, в котором в начальный момент времени разделены электрические заряды (только в этом случае в момент времени $t = 0$ потечет электрический ток). И в четвертых, в начальный момент времени источник ЭДС должен обладать энергией, а в этот момент катушка индуктивности ей не обладает. Из сказанного выше следует, что катушка индуктивности, на которой возникает ЭДС самоиндукции, не может являться единственным источником ЭДС при принятых условиях составления дифференциального уравнения (1). Таким образом, в качестве источника ЭДС, при принятых начальных условиях уравнения (1), следует выбрать конденсатор, как один из энергоемких элементов (наряду с катушкой индуктивности), входящих в состав колебательного контура с сосредоточенными параметрами. Однако констатации одного этого фактора недостаточно и необходимо выяснить, что же фактически является источником ЭДС в рассматриваемом контуре.

Следовательно, для правильной записи уравнения типа (1), описывающего процессы в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами, необходимо задание значения его правой части, которое можно получить, сформулировав и использовав условие необходимости и достаточности [10] для протекания тока по колебательному контуру. Чтобы его получить, следует детально рассмотреть процессы, которые должны происходить в конденсаторе колебательного контура при протекании электрического тока по его обкладкам.

Как известно, электрическое поле конденсатора однородно и линии его напряженности нормальны к поверхности проводящих обкладок. Но это справедливо только для случая, когда электрический ток по нему не протекает. В случае прохождения тока по конденсатору необходимо чтобы электрическое поле конденсатора, в местах расположения выводов от обкладок, имело тангенциальную составляющую, под действием которой и происходит движение зарядов по его обкладкам, т. е. начинает течь электрический ток. Это можно наглядно пояснить с помощью рисунков, на которых показаны картины силовых линий полей конденсаторов для случаев однородного поля (без учета краевых эффектов рис. 2), когда нет тангенциальной составляющей, и в этом случае ток по обкладкам не течет. На рис. 3 показано электрическое поле конденсатора, когда оно имеет тангенциальную составляющую в местах выводов от обкладок, и в этом случае по его обкладкам будет протекать ток проводимости. Для того чтобы изменить конфигурацию электрического поля заряженного уединенного конденсатора необходимо к его выводам подключить внешнюю цепь, которая в нашем случае имеет вид катушки индуктивности и активного сопротивления. В зависимости от характера подключенной внешней цепи и параметров конденсатора, в замкнутом контуре будут наблюдаться различные виды электромагнитных процессов.

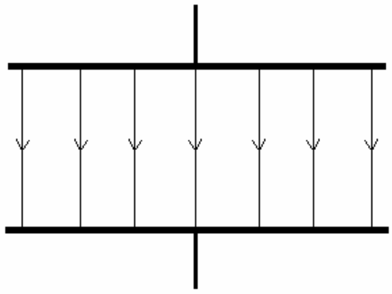

Рис. 2 – Картина силовых линий конденсатора

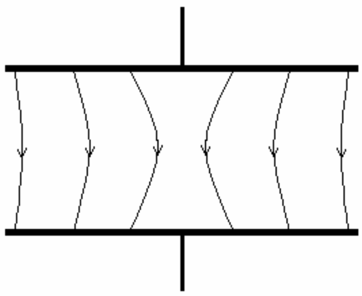

Рис. 3 – Картина силовых линий конденсатора

Таким образом, на основании материала рассмотренного выше, можно сделать вывод, что для того чтобы в колебательном контуре протекал электрический ток необходимо и достаточно того, чтобы электрическое поле конденсатора в местах выводов от обкладок имело тангенциальную составляющую. При этом, естественно, будет автоматически выполняться условие наличия в колебательном контуре электромагнитной энергии. Очевидно, что эта тангенциальная составляющая электрического поля конденсатора и будет определять величину электродвижущей силы, действующей в колебательном контуре. Нормальная же составляющая электрического поля конденсатора определяет величину падения напряжения на конденсаторе при протекании по нему электрического тока.

Как видно из приведенного уравнения (1), условие присутствия тангенциальной составляющей в электрическом поле конденсатора в явном виде в уравнении отсутствует. Оно вероятно, по мнению некоторых авторов, выражено в том, что по контуру протекает электрический ток. По этой причине, очевидно, это уравнение и является однородным. Эта наша мысль находит подтверждение в литературе. Так в работах Понтрягина Л. С. по дифференциальным уравнениям и их приложениям [8, 9] об этом сказано на стр. 88 и 101 соответственно. В частности там говорится, что в пассивной электрической цепи (в цепи без источника тока) электрические явления сами по себе не возникают, и это отражается в том, что частным решением уравнения (1) является функция $I(t) \equiv 0$. И далее: ”Можно, однако, рассмотреть работу электрической цепи, считая, что ток в ней уже имеется, и выяснить как этот ток будет изменяться со временем”. Здесь следует сделать одно замечание, заключающееся в том, что для условия возникновения и существования тока в контуре должны соблюдаться определенные условия, т.е. должен быть источник ЭДС, создающий этот ток. В уравнение (1) он не входит, следовательно единственным физически обоснованным решением этого уравнения является его нулевое решение, о чем мы писали выше.

Поясним суть происходящих явлений в конденсаторе, в результате которых его электрическое поле в местах расположения выводов от обкладок приобретает тангенциальную составляющую. В начальный момент времени t = 0 поле конденсатора однородно и его силовые линии перпендикулярны к плоскости обкладок. Часть этих линий находится в области выводов от середин обкладок и способствует возникновению, после замыкания ключа Кл в положение 2 (рис. 1), начального тока в цепи колебательного контура. При протекании тока по конденсатору в области расположения выводов уменьшается объемная плотность энергии по сравнению с другими его областями. Вследствие этого, в этой области пространства будут проявляться краевые эффекты аналогичные эффектам на краю обкладок. В результате силовые линии будут искривляться, и их картина будет выглядеть примерно так, как показано на рисунке 3. В результате описанных явлений, поле конденсатора приобретет тангенциальную составляющую и по его обкладкам будет протекать электрический ток.

Вывод неоднородного уравнения. В [1] было записано неоднородное дифференциальное уравнение, описывающее электромагнитные процессы в колебательном контуре, исходя из эмпирических данных, которое имеет вид

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = U_{ckm} e^{-\beta t} \sin \omega t \,. \tag{3}$$

Уравнение (3) может быть получено и из второго закона Кирхгофа для замкнутого контура. Применив его для колебательного контура, изображенного на рис. 1, и учитывая выше изложенное, имеем

$$IR + \frac{q}{C} = \varepsilon_{И} + \varepsilon_{ИНД} \,, \tag{4}$$

где $\varepsilon_{и}$ – ЭДС источника тока; $\varepsilon_{инд}$ – ЭДС индукции, наведенная на катушке индуктивности.

Согласно определению, ЭДС источника равна отношению работы сторонних сил в источнике $A_{сти}$ к величине переносимого заряда q, т.е.

$$\varepsilon_{И} = \frac{A_{СТИ}}{q} \,. \tag{5}$$

ЭДС индукции, наводимая на катушке индуктивности, согласно нашей трактовке этого явления [1, 11], определяется по формуле

$$\varepsilon_{ИНД} = \frac{A_{СТ1}}{q} - \frac{d(n\Phi)}{dt} \,, \tag{6}$$

где $A_{ст1}$ – работа сторонних сил по перемещению заряда q по обмотке катушки индуктивности; n – число витков катушки; Φ – магнитный поток, создаваемый в катушке; t – время.

Поскольку работа сторонних сил $A_{ст}$ в контуре равна сумме работ по перемещению заряда в источнике и по обмотке катушки индуктивности, то в правой части выражения (4) стоит знак плюс между составляющими $\varepsilon_{и}$ и $\varepsilon_{инд}$. Объединяя формулы (5) и (6) в выражение (4) и учтя что $\frac{A_{СТ}}{q} = \frac{A_{СТИ}}{q} + \frac{A_{СТ1}}{q}$ приходим к следующему выражению

$$IR + \frac{q}{C} = \frac{A_{СТ}}{q} - \frac{d(n\Phi)}{dt} \,. \tag{7}$$

Можно показать, что второй член в правой части выражения (7) может быть представлен в виде

$$\frac{d(n\Phi)}{dt} = L\frac{dI}{dt} \,, \tag{8}$$

где L – индуктивность катушки; I – сила тока, текущего в цепи.

С учетом выражения (8), формула (7) примет вид

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \frac{A_{СТ}}{q} \,. \tag{9}$$

Выразив силу тока через заряд в виде соотношения $I = \frac{dq}{dt}$ и разделив обе части уравнения (9) на L, получим

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=\frac{1}{L}\frac{A_{CT}}{q}. \qquad (10)$$

В правую часть уравнений (9) и (10) входит отношение работы сторонних сил A_{CT} к величине заряда q. Максимальное значение этого соотношения равно максимальному напряжению на конденсаторе колебательного контура U_{ckm}. Этот тезис можно подтвердить тем, что при замыкании ключа Кл в положение 1 (рис. 1) конденсатор C под действием источника ε заряжается до выше указанного напряжения. Отношение же A_{CT} к q определим из решения однородного уравнения (10), для чего приравняем его правую часть к нулю и введем следующие обозначения: $\frac{R}{L}=2\beta$; а $\frac{1}{LC}=\omega_0^2$, в результате получим

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0. \qquad (11)$$

Решение такого уравнения хорошо известно и для случая, когда $\omega_0^2>\beta^2$, который наиболее приемлем в генераторах колебаний, служащих для электропитания различного класса устройств, имеет вид

$$q=q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi), \qquad (12)$$

где q_m – значение максимального заряда; $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ - собственная частота колебательного контура.

Из выражения (12) видно, что амплитуда заряда экспоненциально уменьшается со временем, следовательно, и амплитуда напряжения в правой части выражения (10) должна подчиняться этому же закону. Кроме того, заряд изменяется по периодическому закону, поэтому по периодическому закону должна изменяться и ЭДС, действующая в контуре. Так как такой величиной является тангенциальная составляющая напряжения конденсатора, то правая часть выражения (10) должна иметь вид

$$\frac{U_{ckm}}{L}e^{-\beta t}\sin\omega t. \qquad (13)$$

Таким образом, обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение, описывающее свободные затухающие колебания в колебательном контуре запишется в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{U_{ckm}}{L}e^{-\beta t}\sin\omega t. \qquad (14)$$

Из уравнения (14) видно, что оно удовлетворяет условию возникновения и существования тока в колебательном контуре, так как его правая часть не равна нулю. Найдем решение этого уравнения. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений [8] известно, что решение такого неоднородного уравнения равно сумме общего решения (12) однородного уравнения (11) и частного решения неоднородного уравнения (14). Частное решение справедливо для установившегося состояния колебательной системы, следовательно, оно соблюдается для времени $t\to\infty$ [12]. Для нахождения частного решения возьмем первую и вторую производные от выражения (12) и подставим их значения в формулу (14). Собрав коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ в левой части уравнения, получим следующее выражение

$$q_m e^{-\beta t}(\beta\omega+\beta\omega-2\beta\omega)\sin\omega t+q_m e^{-\beta t}(\beta^2-\omega^2-2\beta^2+\omega_0^2)\cos\omega t=\frac{U_{ckm}}{L}e^{-\beta t}\sin\omega t. \qquad (15)$$

Из формулы (15) видно, что оба слагаемых в левой части уравнения равны нулю, так как равны нулю выражения в скобках. Это означает что частное решение неоднородного уравнения (14), справедливое для времени $t\to\infty$, равно нулю.

Обсуждение полученных результатов. Проанализируем результаты, полученные на основании проведенных исследований. Математическая модель, служащая для описания свободных электромагнитных процессов в колебательном контуре и удовлетворяющая условию существования тока в нем, представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Из-за того, что частное решение неоднородного уравнения для времени $t \to \infty$ имеет нулевое решение, его решение совпадает с решением соответствующего ему однородного уравнения. Это обстоятельство, очевидно, послужило основанием тому, что математической моделью описания электромагнитных процессов в колебательном контуре являлось однородное дифференциальное уравнение.

Исходя из общности рассмотрения вопросов существования и возникновения колебаний различной природы, принятой при изложении данного материала в большинстве учебников по общей физике, можно также сделать определенные выводы, подтверждающие наши наблюдения. К примеру, механические колебания математического и физического маятников происходят под действием тангенциальной составляющей силы тяжести. Конечно, наличие силы тяжести для существования этих видов колебаний необходимо, но одного этого условия недостаточно, так как требуется еще и наличие тангенциальной составляющей этой силы. Маятники, находящиеся в поле силы тяжести не будут совершать колебаний до тех пор, пока к ним не будет приложена тангенциальная составляющая этой силы, а для этого необходимо, чтобы внешние силы совершили определенную работу и вывели их из состояния равновесия, в результате чего и должна появиться тангенциальная составляющая силы тяжести. Таким образом, общность существования механических и электромагнитных колебаний заключается в том, что в обоих случаях необходимы тангенциальные составляющие, будь то электрического поля конденсатора или силы тяжести.

Выводы

Свободные электромагнитные процессы в колебательных контурах с сосредоточенными параметрами описываются неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Перечень ссылок

1. *Гейзер А.А.* Генераторы колебаний для электропитания магнитно-импульсных устройств. – Мариуполь: Рената, 1998. – 224 с.
2. *Ушаков В.Я.* Изоляция установок высокого напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 496 с.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики.- М.: Высшая школа, 1985.- 432 с.
4. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т.2.- М.: Наука., 1988.- 496 с.
5. *Ахиезер А.И.* Общая физика, Электрические и магнитные явления: Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1981.- 472 с.
6. *Кирхгоф Густав Роберт*. Избранные труды. – М.: Наука, 1988. – 430 с.
7. *Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С.* Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1972. - 640 с.
8. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издание 2. – М.: Наука, 1965.- 332 с.
9. *Понтрягин Л.С.* Дифференциальные уравнения и их приложения.- М.: Наука, 1988.- 208 с.
10. *Гейзер А. А.* Принцип необходимости и достаточности в проблемном обучении. В книге: методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения. Тезисы докладов 4-ой международной научно- методической конференции Донецк: ДОНГУ, 1996.- с. 84.
11. *Гейзер А. А.* Использование некоторых выражений закона электромагнитной индукции. //Электричество. – 1996. - № 10. – С. 73 – 76.
12. *Зернов Н.В., Карпов В.Г.* Теория радиотехнических цепей. – М., Л.: Энергия, 1965. – 892 с.

Гейзер Альфред Альбертович. Канд. техн. наук, доцент кафедры физики, окончил Томский институт радиоэлектроники и электронной техники в 1968 году. Основные направления научных исследований – применение импульсных электромагнитных полей в промышленности; электродинамика.

Статья поступила 05.03.2001.