I ВЕСТНИК
I ПРИАЗОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕ СКОГО УНИВЕРСИТЕТА
I 1999 г Вып. №8

УДК 338.515.

Г **Макаров П.А.**

ОПТИМАЛЕН ЛИ ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЛАН?

Ставится и решается вопрос о необходимых и достаточных условиях оптимальности в экономических процессах.

Главной целью любого хозяйственного процесса является, как известно, максимизация прибыли. Структурно этот процесс складывается из двух с оставляющих: производственной и рыночной. Для достижения поставленной цели необходимо, следовательно, решать двуединую задачу оптимизации производства и рынка.

Первая часть задачи теоретически решена [1] и сводится к отысканию и анализу функции прибыли:

$$П^с)=Р\{х)-3^с). \quad (1)$$

где $П(x)$ - функция прибыли в зависимости от объема производствам продукции (х), грн,

$P(x)$ - функция годового объема реализации в зависимости от цены и объема производства, грн;

$З(x)$ – функция затрат на весь годовой объем производства продукции, грн.

Функция прибыли (1) достигнет экстремума при $П'(x)=0$, поэтому:

$$P'(x)=З'(x), \quad (2)$$

Следовательно, величина прибыли будет максимальной в том случае, если будет производиться такое количество продукции (х), при котором объем реализации и затраты на этот объем будут иметь одинаковую скорость изменения. Если $P'(x)$ назвать предельным продуктом, а $З'(x)$ – предельными затратами, то в оптимальном плане производства необходимо выдержать условие равенства предельного продукта предельным затратам.

Кроме того, объем реализации можно записать в виде:

$$P(x)=p\cdot x, \quad (3)$$

где p – цена единицы продукции, грн/ед;

x – объем производства, ед.

Следовательно $P'(x)=p$, и из (2) вытекает: $З'(x)=p$, (4)

Т.е. в оптимальном плане производства предельные затраты на производство равны цене за единицу продукции.

Пусть: 1) функция общих (годовых) затрат на производство имеет вид [1]:

$$З(x)=0{,}01x^3-1{,}2x^2+50x+600, \quad (5)$$

2) цена за единицу продукции на рынке последовательно возрастает и принимает значение p_1=5, p_2=18 и p_3=29 грн/ед. Сколько необходимо производить продукции (x = ?) и по какой цене продавать, чтобы получить максимальную прибыль?

Объем реализации, исходя из (3) записывается в виде:

$$P(x_1)=5x;\ P(x_2)=18x;\ P(x_3)=29x. \quad (6)$$

Соответственно: $P'(x_1)=5$, $P'(x_2)=18$ и $P'(x_3)=29$. (7)

Исходя из (5) можно определить затраты:

- на единицу продукции:

* ПГТУ, канд. экон. наук, доц.

$$з_{ед} = 0.01x^2 - 1.2x + 50 + \frac{600}{x}, \tag{8}$$

– переменную часть затрат на единицу продукции:

$$з_{пер} = 0.01x^2 - 1.2x + 50, \tag{9}$$

– постоянную часть затрат на единицу продукции:

$$з_{пос} = \frac{600}{x}, \tag{10}$$

С учетом (4) и (5) можно записать:

$$p = 0.03x^2 - 2.4x + 50, \tag{11}$$

Тогда по вариантам цены имеем

$$p_1 = 0,03x_1^2 - 2.4x_1 + 50 = 5;\ p_2 = 0.03x_2^2 - 2.4x_2 + 50 = 18;\ p_3 = 0.03x_3^2 - 2.4x_3 + 50 = 29 \tag{12}$$

Из каждого уравнения (12) следует, что количество продукции, которое необходимо производить будет равно соответственно: $x_1 = 50$ *ед*, $x_2 = 63$ *ед и* $x_3 = 70$ *ед*

Величина прибыли, исходя из (1) и найденных объемов производства, будет иметь вид по вариантам цены:

$$\left.\begin{aligned} П(50) &= 5 \cdot x_1 - (0.01x_1^3 - 1.2x_1^2 + 50x_1 + 600) = -1100\,грн \\ П(63) &= 18 \cdot x_2 - (0.01x_2^3 - 1.2x_2^2 + 50x_2 + 600) = -354\,грн \\ П(70) &= 29 \cdot x_3 - (0.01x_3^3 - 1.2x_3^2 + 50x_3 + 600) = 380\,грн \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Т.е. два первых варианта цены принесут убыток при любом объеме производства.

Вариант цены p=29 грн/ед позволит получить максимальную положительную величину прибыли при Xj=70 единиц. Графически полученное решение представлено на рисунке 1. Оно характеризует процесс в единственной статически зафиксированной “оптимальной” точке (г?--70) и ничего не говорит о направлении изменения его эффективности. Он может оказаться в этой оптимальной точке и тогда, когда «набирает обороты по эффективности», и тогда, когда эффективность его снижается. Такая динамика процесса обусловливается постоянным изменением функций (5-13).

Следовательно, кроме решения задачи об отыскании “статически оптимальной” точки, возникает задача идентификации направления развития процесса и планирования его на перспективу с условием повышающейся (или хотя бы остающейся постоянной) прибыли в расчете на единицу продукции.

С этой целью исследуем соотношение темпов изменения показателей процесса. Все расчеты выполнены по известной методике [2] для случая статически оптимального решения, т.е. для p = 29 грн./ед. и $x_0пт$ - 70 ед.

Темпы роста.

- объема производства (реализации):

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{29}{29x},$$

– общих затрат на производство:

$$\frac{З'(x)}{З(x)} = \frac{0,03x^2 - 2,4x + 50}{0,01x^3 - 1,2x^2 + 50x + 600}.$$

– балансовой прибыли [1]:

[1] при x = 46 функция терпит разрыв (см. кривые 3 на рис.2).

$$\frac{П'(x)}{П(x)}=\frac{-0{,}03x^2+2{,}4x-21}{-0{,}01x^3+1{,}2x^2-21x-600},$$

- затрат на единицу продукции:

$$\frac{з_{ед}'(x)}{з_{ед}(x)}=\frac{0{,}02x-1{,}2-\dfrac{600}{x^2}}{0{,}01x^2-1{,}2x+50+\dfrac{600}{x}},$$

- переменной части затрат:

$$\frac{з_{пер}'(x)}{з_{пер}(x)}=\frac{0{,}02x-1{,}2}{0{,}01x^2-1{,}2x+50},$$

- постоянной части затрат:

$$\frac{з_{пос}'(x)}{з_{пос}(x)}=-\frac{1}{x},$$

- цены за единицу продукции:

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{0{,}06x-2{,}4}{0{,}03x^2-2{,}4x+50}.$$

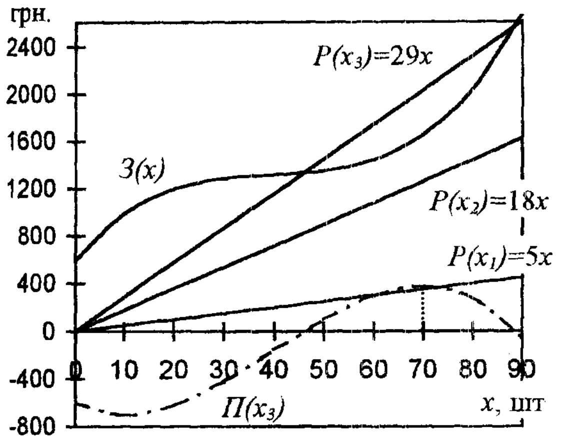

Рис.1 - Оптимальное значение прибыли $П(x_3)$ при x_3 = 70 ед. и при цене p_3 = 29 грн./ед.
$P(x_i)$ – объем реализации;
$З(x)$ – затраты на годовой выпуск.

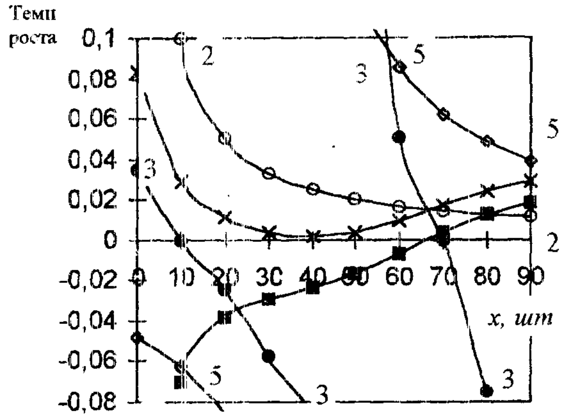

Рис.2 - Темпы роста:
1 – общих затрат на производство;
2 – объема реализации;
3 – прибыли;
4 – затрат на единицу продукции;
5 – цены за единицу.

Графически темпы роста показателей представлены на рис.2. Как видно, объем реализации (2), общие затраты на производство (1) (до x - 46) и прибыли (3), характеризуются снижающимися темпами роста. Нетрудно также заметить, что темпы роста общих затрат на производство (1), начиная с $x = 46$, превышали темпы роста объема реализации (2):

$$\frac{0{,}03x^2-2{,}4x+50}{0{,}01x^3-1{,}2x^2+50x+600}>\frac{29}{29x}.$$

Для оптимальной точки x = 70 это соотношение составило 0,0176 > 0,0143, что свидетельствует об удорожании производства единицы продукции.

Таким образом, соотношение темпов роста (рис. 2) свидетельствует о том, что процесс развивался не эффективно, в том числе, и в точке $x = 70$, максимизирующей прибыли при статическом подходе к решению задачи. Следовательно, статическая максимизация прибыли является хотя и необходимым, но недостаточным условием эффективной деятельности предприятия на рынке.

Задача заключается в конструировании такого соотношения динамики показателей процесса производства и реализации, при котором выполнялись бы условия необходимости и достаточности эффективного ведения рыночного хозяйства.

Условия достаточности требует, чтобы темпы роста прибыли были не ниже, а темпы роста затрат не выше темпов роста объема реализации.

В предельном (еще допустимом) соотношении это условие достаточности записывается в виде равенства:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{З'(x)}{З(x)} = \frac{П'(x)}{П(x)}, \qquad (14)$$

Так, для примера чтобы "перевести" процесс в эффективную область (при $p = 29$ грн./ед., и $x = 70$ ед.), необходимо потребовать, как минимум, выполнения равенства в условии (14):

$$\frac{П'(x)}{П(x)} = \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{29}{29x}, \qquad (15)$$

При $x = 70$, имеем:

$$\frac{П'(x)}{П(x)} = 0{,}014, \qquad (16)$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид:

$$П(x) = C \cdot e^{0{,}014x}, \qquad (17)$$

где C – постоянная интегрирования.

С учетом начальных условий $x = 70$ ед. и $П = 380$ грн., получим частное решение:

$$П(x) = 142{,}86 \cdot e^{0{,}014x}, \qquad (18)$$

1 аки образом, чтобы выполнялось условие достаточности, прибыль при x > **70.** например при x = 80, должна составить не 280 единиц, пак это следует из "статически оптимального" решения, а 437,9 грн. (решение следует из (18) при г = 80). Если ставится задача выполнить это условие без изменения цен (при p - 29 грн./ед.), то необходимо сформировать снижающиеся темпы затрат на единицу продукции Сделать это можно за счет снижения постоянных и переменных затрат.

При увеличивающихся объемах производства постоянные затраты с учетом (16) должны снижаться темпами":

$$\frac{з_{пос}'(x)}{з_{пос}(x)} = -0{,}014, \qquad (19)$$

После решения получаем:

$$з_{пос} = 23{,}3 \cdot e^{-0{,}014x}, \qquad (20)$$

Из (20) следует, что, например, при $x = 80$ постоянные затраты на единицу продукции составят 7,43 грн./ед., т.е. на 7 коп. (7,50 - 7,43) меньше, чем при "статически оптимальном" решении, прибыль в этом случае будет равна:

$$П(x) = P(x) - (з_{пер} + з_{пос}) \cdot x = 29 \cdot 80 - (18 + 7{,}43) \cdot 80 = 285{,}6\,грн,$$

[2] знак "–" свидетельствует об обратном характере изменения постоянных затрат по отношению к изменению объема реализации.

* Однако, такая величина прибыли не обеспечивает условия достаточности (15 и 16). ^Следовательно, требуемую недостающую часть прибыли 152,3 (437,9 - 285,6) грн. необходимо получить за счет снижения переменной части затрат на единицу.

$$П(80) = p \cdot x - (з_{пер} + з_{пос}) \cdot x = 29 \cdot 80 - (з_{пер} + 7,43) \cdot 80 = 437,9\, грн\,,$$

I Откуда $з_{,,ер}$ = 16,10 грн/ед. Т.е. поставленное условие достаточности эффективного I протекания процесса требует снижения переменной части затрат на 1,9 коп (18-16,10) по г сравнению со “статико-оптимальным” решением задачи.

I Учитывая, что в условиях достаточности (14, 15, 16, 19) используется знак равенства, то [полученное значение прибыли (в примере $P_н$ — 437,9 гри) являетеся наименьшей допустимой, а г затрат - наибольшей допустимой величинами, обеспечивающими условия необходимости и *t* достаточности. Поэтому имеет смысл назвать полученные значения показателей f нормативными. Процесс в этом случае развивается по границе между эффективным и не *I* эффективным ведением дел на предприятии и на рынке;.

I *Выводы*

Поиск критерия оптимальности в экономических процессах обусловлен их динамическим характером. Существующие методы оптимизации дают возможность отыскать статический оптимум, но не характеризует направление развития процесса. Таким образом, іфоме понятия “условие необходимости” оптимума., формируется еще понятие “условие экономической достаточности”. Оно определяется соотношением динамических характеристик экономического процесса. Разработана и проиллюстрирована методика поиска решения с учетом обоих условий в их взаимообусловленности.

Перечень ссылок

1. Mathematische Gnmdlagen fur Betriebswirte. Von Sabine Hoffman. 4., uberarbeitete Auflage, Heme/Berlin, 1995, P. 250.
2. *Макаров П.А., Сударев В.Jl.* Унификация методики анализа динамических процессов/)' Известия вузов. Черная металлургия. - 1985. - Ха 12. - С. 112 - I 16.

Макаров Петр Алексеевич. Кандидат экономических наук, доцент кафедры Менеджмента и маркетинга, окончил Ждановский металлургический институт 1968 году. Основные направления научных исследований: **оптимизация,** планирование и прогнозирование экономических процессов.